Lösungen zum Informationsblatt zum Einstieg in die Einführungsphase

Wichtige Zusammenhänge und häufige Fehlerquellen sind in den Rechnungen rot markiert. Die Lösungen sind jeweils grün markiert, um einen schnellen Abgleich zu ermöglichen.

1.1 Termumformungen

$3x(4a + 5b) - 2a(6x + 5b)$

$= 3x \cdot 4a + 3x \cdot 5b - 2a \cdot 6x - 2a \cdot 5b$

$= 12ax + 15bx - 12ax - 10ab$

$= 15bx - 10ab$

$(3x - 4y)^2$

$= (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$

1.2 Potenzgesetze

1) $b^{-2} \cdot b \cdot b^{-5} = b^{-2+1-5} = b^{-6}$

2) $k^{n+1} \cdot k^{7-2n} = k^{n+1+7-2n} = k^{8-n}$

3) $b^{-3} : b^{-5} = b^{-3-(-5)} = b^{2}$

4) $(a^{-4} : b^{5})^{-3} = (a^{-4})^{-3} : (b^{5})^{-3} = a^{12} : b^{-15}$

1.3 Wurzelgesetze

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

2) $7\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (7 - 4) \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

3) $\sqrt{27} : \sqrt{3} = \sqrt{27 : 3} = \sqrt{9} = 3$

4) $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

1.4 Umgang mit Brüchen

1) $\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

2) $\frac{7}{15} = \frac{56}{120}$

3) $\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{15}{18} + \frac{4}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$; $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 9} = \frac{10}{54} = \frac{5}{27}$

$\frac{5}{6} - \frac{2}{9} = \frac{15}{18} - \frac{4}{18} = \frac{11}{18}$; $\frac{5}{6} : \frac{2}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{2} = \frac{45}{12} = 3\frac{1}{2}$

1.5 Gleichungen lösen

a) $3 \cdot (5x + 3) = 3x - (6x - 18)$

$15x + 9 = -3x + 18 \quad | +3x \quad | -9$

$18x = 9 \quad | :18$

$x = 0{,}5$

b) $-\frac{1}{2}r + 5 = 7 + 1{,}5r \quad | +\frac{1}{2}r \quad | -7$

$-2 = 2r \quad | :2$

$r = -1$

c) $\frac{6}{x+3} = \frac{15}{4x} \quad | \cdot (x+3) \quad | \cdot 4x$

$6 \cdot 4x = 15 \cdot (x + 3) \quad |$

$24x = 15x + 45 \quad | -15x$

$9x = 45 \quad | :9$

$x = 5$

d) $-12x + 5y = -21$ und $8x - 2y = 18 \quad | :(-2)$

$-4x + y = -9 \quad | +4x$

$-12x + 5(4x - 9) = -21 \qquad y = 4x - 9$

$-12x + 20x - 45 = -21 \quad | +45$

$8x = 24 \quad | :8$

$x = 3 \rightarrow y = 4 \cdot 3 - 9 = 3$

2.

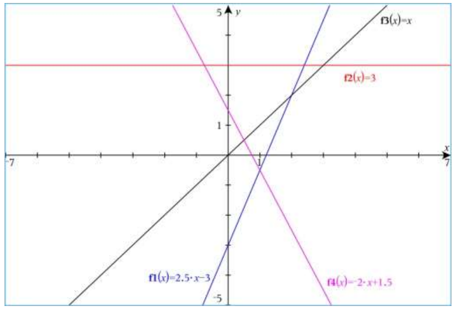
a) $f(x) = 2x^2 + 7x - 2$

$f(3) = 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 - 2 = 37$

b) $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 7$

c) $f(-2{,}5) = 2 \cdot (-2{,}5)^2 + 7 \cdot (-2{,}5) - 2 = -7$

3.1



3.2

Y-Achsenanschnitt b ablesen durch Schnittstelle mit Y-Achse, Steigung m zwischen zwei eindeutigen Punkten ablesen, Einfügen in allgemeine Form der linearen Funktion:

$y = mx + b \rightarrow y_1 = -3x + 5$, $y_2 = 0{,}5x - 4$

3.3

Geradengleichung: $y = m \cdot x + b \rightarrow -2 = m \cdot (-3) + b$ und $7 = m \cdot 1 + b \quad | -1m$

$7 - m = b$

$-2 = -3m + 7 - m \quad | -7$

$-9 = -4m \quad | :(-4)$

$2{,}25 = m \rightarrow 7 - 2{,}25 = b \rightarrow b = 4{,}75$

<u>Alternativ:</u> Steigung m: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-2)}{1-(-3)} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

Y-Achsenabschnitt b: $y = m \cdot x + b$ x,y,m→ $7 = 2{,}25 \cdot 1 + b$ | -2,25

$4{,}75 = b$ → $y = 2{,}25x + 4$

3.4

Nullstellen: $y = 0$

a) $0 = 2{,}5x - 3$ | +3
$3 = 2{,}5x$ | : 2,5
$1{,}2 = x$

d) $0 = -2x + 1{,}5$ | -1,5
$-1{,}5 = -2x$ | :(-2)
$0{,}75 = x$

b) 0 = 3 → Widerspruch, also
keine Nullstellen

c) $0 = x$

3.5

$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathet}{Ankathete} = \frac{m}{1} = m$

→ $\alpha = \tan^{-1}(m)$

a) m = 2,5 → $\alpha = \tan^{-1}(2{,}5) \approx 0{,}75°$

b) m = 0 → $\alpha = \tan^{-1}(5) \approx 0°$

c) m = 1 → $\alpha = \tan^{-1}(0) \approx 45°$

d) m = -2 → $\alpha = \tan^{-1}(-2) \approx 2{,}19°$

3.6

a) $y = mx + b$ → gleiche Steigungen $m_g = m_h = -3$,
P(0|1) liegt auf g, da g(0) = 1 ist, aber P liegt nicht auf h,
da h(0) = -0,5 → g und h sind echt parallel

b) $m_g = -1/m_h$
da -1/(-0,5) = 2
→ g und h sind orthogonal,

Schnittpunkt: g(x) = h(x)
$2x + 4 = -0{,}5x$ | +0,5x | -4
$2{,}5x = -4$ | :2,5
$x = -1{,}6$ → $y = g(-1{,}6) = 0{,}8$
→ Sie schneiden sich im Punkt S(-1,6|0,8).

c) g(x) = h(x) → $-3x + 1 = x + 5$ | +3x | -5
$-4 = 4x$ | :4 → $x = -1$ → $y = h(1) = 6$ → S(-1|6)

3.7

x: Anzahl der Gesprächsminuten (variiert), y: Gesamtkosten für einen Monat in Euro

Auch ohne Gesprächsminuten (x=0) muss man 10Euro bezahlen → b = 10 (Euro)

Pro 1 Minute steigen die Kosten um 0,25Euro (Einheit!!) → m = 0,25 (Euro pro Min)

→ $y = 0{,}25x + 10$ bzw. $f(x) = 0{,}25x + 10$

3.8

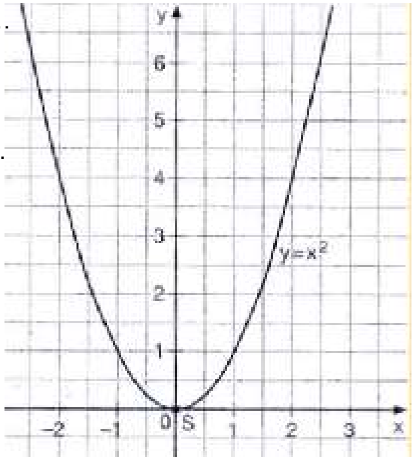
a) x = 47 → $f(47) = 0{,}25 \cdot 47 + 10 = 21{,}75$ → A: Er muss 21,75Euro zahlen.

b) y = 26 → $26 = 0{,}25x + 10$ | -10 | :0,25
$64 = x$ → A: Sie kann 64 Minuten telefonieren.

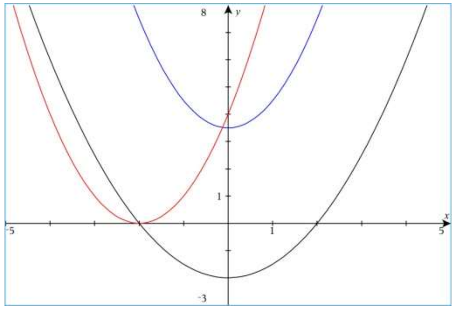
c) 1. Es ist nicht geklärt, ob der Minutenpreis für alle Netze und das Ausland gilt.
2. SMS und Internetnutzung sind nicht berücksichtigt.
3. Da eine angebrochene Minute immer das gleiche kostet, egal ob 3Sek oder 30Sek telefoniert wurden, entsteht genau genommen keine durchgängige Gerade als Graph (lineare Funktion), sondern eine Stufenfunktion. Grenzt man den Definitionsbereich der Funktion (die x-Werte) auf die Natürlichen Zahlen ein, entsteht eine „Gerade“ aus Punkten, die nicht verbunden werden dürften.

4.1

Eine Normalparabel, die nicht verschoben ist, …
…ist nach oben geöffnet.
…hat ihren Scheitelpunkt in S(0|0).
…hat an ihrem Scheitelpunkt S einen Tiefpunkt.
…ist achsensymmetrisch zur Y-Achse.
…hat keine negativen Funktionswerte.
…ist für alle x-Werte definiert.



4.2



4.3

Der Scheitelpunkt lautet S(-2│-1) und die Parabel ist nicht gestreckt oder gestaucht

→ $y = 1 \cdot (x + 2)^2 - 1 = (x + 2)^2 - 1$

4.4

a) Ist der Streckfaktor a größer als 1, werden die zu berechnenden Funktionswerte größer als bei einer Normalparabel (mit a = 1). Dadurch wird die Parabel schmaler. Man sagt, sie wird „gestreckt".

b) Ist der Streckfaktor negativ, ändert sich das Vorzeichen aller Funktionswerte, so dass z.B.
$f(x) = -3x^2$ gegenüber $f(x) = 3x^2$ an der X-Achse gespiegelt ist. Man sagt, die Parabel ist „nach unten geöffnet".

c) Da a größer als Null ist, ist die Parabel nach oben geöffnet, allerdings werden die Funktionswerte durch den Faktor a kleiner als bei der Normalparabel, so dass die Parabel breiter wird. Man sagt, sie wird „gestaucht".

4.5

a) $y = 2x^2 + 7x \underline{- 4}$

$y = -4$, also S(0| -4)

b) $f(x) = 2(x + 1)^2 + 3{,}5$

$\cdot(-1)$

S(-1| 3,5)

4.6

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$

$= 3[x^2 - 2x + 2]$

$= 3[x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 2]$ quadr. Erg

$= 3[(x - 1)^2 + 1]$

$= 3(x - 1)^2 + 3$

b) $f(x) = 2{,}5 \cdot (x - 2)^2 + 1{,}4$ │bin. F.

$= 2{,}5(x^2 - 4x + 4) + 1{,}4$

$= 2{,}5x^2 - 10x + 11{,}4$

4.7

Ansatz: $y = 0$

a) $0 = x^2 - 4$ │+4

$4 = x^2$ │$\sqrt{\ }$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 2$

b) $0 = -(x + 2)^2 - 9$ │+9

$9 = -(x + 2)^2$ │·(-1)

$-9 = (x + 2)^2$ │$\sqrt{\ }$

→ geht nicht →keine Nullstellen

c) $0 = x^2 + x - 6$ │p-q-Formel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$p = 1$ und $q = -6$ → $x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 6} = -0{,}5 \pm 2{,}5$

→ $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$

d) $0 = 3x^2 - 4x$ │x ausklammern

$0 = x(3x - 4)$ → $x_1 = 0$ und $3x - 4 = 0$ │+4 │:3 → $x_2 = 4/$

e) $0 = 2x^2 - 4x - 6$ │:2

$0 = x^2 - 2x - 3$ │pq-Formel → $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2$

$x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

f) $0 = x^2 - 3x + 2{,}25$ │pq-Formel → $x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 2{,}25} = 1 \pm 0$

$x_1 = 1$

4.8

a) $y = -(x + 2{,}5)^2 + 1$ → Die Parabel ist nach unten offen und hat ihren Scheitelpunkt bei x = -2,5 → Der Graph steigt bis x = -2,5 und fällt ab da.

b) $y = -4x^2 - 80x - 375$ │Scheitelpunkt finden

$y = -4(x^2 + 20x + 100 - 100 + 93{,}75)$ │quadr. Ergänzung

$y = -4((x + 10)^2 - 6{,}25)$

$y = -4(x + 10)^2 + 25)$ →nach unten offen, S bei x = -10

→ Der Graph steigt bis x = -10 und fällt ab x = -10.

4.9

Nullstellen: $y = 0$

a) $0 = -(x + 2{,}5)^2 + 1 \quad | -1 \quad | \cdot(-1)$

$1 = (x + 2{,}5)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 1 = x + 2{,}5 \quad | -2{,}5$

→ $x_1 = -3{,}5$ und $x_2 = -1{,}5$

→ Das die Parabel nach unten offen ist, gilt $f(x) < 0$ für $x < -3{,}5$ und $x > -1{,}5$ und $f(x) > 0$ für $-3{,}5 < x < -1{,}5$

b) $0 = -4x^2 - 80x - 375 \quad | :(-4)$

$0 = x^2 + 20x + 93{,}75 \quad |$ pq-Formel

→ $x_{1/2} = 10 \pm \sqrt{10^2 - 93{,}75} = 10 \pm 2{,}5$

→ $x_1 = 12{,}5$ und $x_2 = 7{,}5$

→ Das die Parabel nach oben offen ist, gilt $f(x) < 0$ für $x < 7{,}5$ und $x > 12{,}5$ und $f(x) > 0$ für $7{,}5 < x < 12{,}5$

4.10

$y = -0{,}3x^2 - 1{,}2x + 0{,}3$ → Für einen Punkt auf der Y-Achse gilt $x = 0$, durch Einsetzen ergibt sich $y = 0{,}3$ → $S(0|0{,}3)$

4.11

Ansatz: $g(x) = f(x)$

$3x - 2 = 2x^2 - 3x - 2 \quad | +2$

$3x = 2x^2 - 3x \quad | -3x$

$0 = 2x^2 - 6x \quad |$ ausklammern

$0 = 2x(x - 3)$

→ $x_1 = 0$ und $0 = x_2 - 3 \quad | +3$

$x_2 = 3$

X-Werte einsetzen:

$g(0) = 3\cdot 0 - 2 = -2$

$g(3) = 3\cdot 3 - 2 = 4$

→ $S_1(0|-2)$, $S_2(3|4)$

4.12

Ansatz: $g(x) = f(x)$

a) $x^2 = -x^2 + 6x + 8 \quad | -x^2$

$0 = -2x^2 + 6x + 8 \quad | :(-2)$

$0 = x^2 - 3x - 4 \quad |$ pq-Formel

→ $x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + 4} = 1{,}5 \pm 2{,}5$

→ $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$

X-Werte einsetzen:

$g(-1) = 1$

$g(4) = 16$

→ $S_1(-1|1)$, $S_2(4|16)$

b) $7(x - 2)^2 = 7x^2 + 21 \quad | :7$

$(x - 2)^2 = x^2 + 3 \quad |$ bin. Formel

$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 3 \quad | -x^2 \quad | -4$

$-4x = -1 \quad | :(-4)$

$x_1 = 0{,}25$

X-Wert einsetzen:

$f(0{,}25) = 21{,}4375$

→ $S(0{,}25|21{,}4375)$

c) $-(x + 1)^2 - 7 = 2x^2 + 4x - 2 \quad |$ bin.Formel

$-(x^2 + 2x + 1) - 7 = 2x^2 + 4x - 2 \quad |$

$-x^2 - 2x - 8 = 2x^2 + 4x - 2 \quad | +x^2 \; +2x \; +8$

$0 = 3x^2 + 6x + 6 \quad | :3$

$0 = x^2 + 3x + 3 \quad |$ pq-Formel

$x_{1/2} = -1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 3} = -1{,}5 \pm \sqrt{-0{,}5}$ → math. nicht möglich

→ kein Schnittpunkt vorhanden

5.1

a) $\bar{E}$: Es wird keine Sonderkarte gezogen oder alternativ

$\bar{E}$: Es wird eine der Teamkarten gezogen.

b) Karten insgesamt: $32\cdot 19 + 24 + 8 = 640$

$\frac{19}{320} = \frac{38}{640}$ → Das Ereignis muss auf 38 der 640 Karten zutreffen, z.B.

E: Es wird eine Karte aus dem Team Deutschland oder Holland gezogen.

c) Es handelt sich um ein Zeihen ohne Zurücklegen, da die gezogenen Karten für die Auswahl der nächsten Karte nicht mehr zur Verfügung stehen. Damit ändert sich bei jedem Zug die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der weiteren Karten.

5.2

Beispielergebnis

Kopf	20
Zahl	30

Die absolute Häufigkeit eines Ereignisses ist die Anzahl des Auftretens, also in der Tabelle abzulesen (30).

Die relative Häufigkeit bezieht die absolute Häufigkeit auf die Gesamtanzahl der Würfe, also für Zahl 30 von 50 → 30/50 = 3/5.

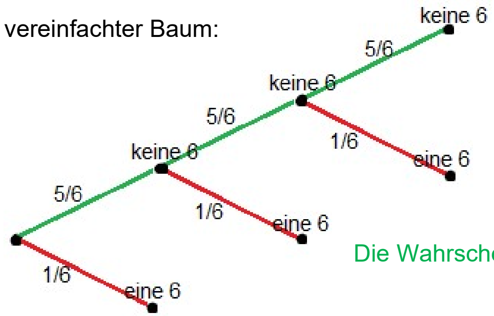
5.3

a) Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, also sind alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich → „Eine 5 sein“ trifft auf ein mögliches Ergebnis von 6 zu, also:
P(5) = 1/6

b) „gerade Zahl sein“ trifft auf 3 der 6 Möglichkeiten zu, also:
P(gerade Zahl) = 3/6 = 1/3

5.4

a) vereinfachter Baum:



→ $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0{,}58$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,58.

b) Gegenereignis $\bar{E}$: In vier Würfen keine 4 würfeln.

P($\bar{E}$) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0{,}58$

P(E) = 1- P($\bar{E}$) = 1- $\frac{125}{216} \approx 0{,}42$

c) P(Summe 5) = P(1,1,3) + P(1,3,1) + P(3,1,1)

+ P(1,2,2) + P(2,1,2) + P(2,2,1)

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \approx 0{,}028$

- Angaben ohne Gewähr! -